

# **CALCULO DE PLACAS ATRAVÉS DO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE 4 NÓS PELA TEORIA DE REISSNER-MINDLIN**

Luís Pedro Almeida Quintal

*Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra -  
Departamento de Engenharia Civil*

## **SUMÁRIO**

Apresenta-se a formulação usada no desenvolvimento de um software de cálculo de placas em Estado Plano de Tensão considerando a deformabilidade por corte e adaptação do elemento de 4 nós a geometrias irregulares. O software foi desenvolvido tendo por base o método numérico de elementos finitos.

## **1. INTRODUÇÃO**

É conhecida a necessidade da consideração da deformabilidade por corte no cálculo de placas grossas.

Das teorias existentes sobre cálculo de placas salienta-se a teoria de Kirchhoff que despreza a deformabilidade por corte e por isso com aplicabilidade a lajes delgadas (espessura inferior a 5% do vão considerado) e a Teoria de Reissner-Mindlin que considerando a referida deformabilidade por corte aplica-se a lajes espessas, apresentando rigidez excessiva para lajes delgadas.

É também evidente a necessidade da aplicação dos softwares a resolução de problemas com características de geometria irregular, o que não permite a aplicação na formulação do Método de Elementos Finitos de elementos regulares.

O presente programa pretende usar a teoria de Reissner-Mindlin também para análise de placas finas e a criação de um elemento que se adapte às mais diversas geometrias.

O programa foi desenvolvido em linguagem FORTRAN.

## **2. PRINCIPIOS CONSIDERADOS**

### **2.1 ELEMENTO**

O elemento considerado será o de quatro nós com dimensão de lado de 2, sendo considerado a origem do seu eixo de coordenadas o centro geométrico, pelo que o mesmo varia entre -1 e 1 (nota explicativa: quando se pretende a normalização de uma qualquer

grandeza e se divide qualquer elemento pelo elemento de maior valor o que se obtêm é um conjunto de valores que variam entre -1 e 1, esta normalização trás enorme vantagem no calculo para a integração numérica, sendo essencial no uso da ferramenta numérica da quadratura de Gauss-Legendre.)

O elemento considerado e neste caso das placas terá 3 graus de liberdade por nó, um afundamento ( $w$ ) e duas rotações ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ).

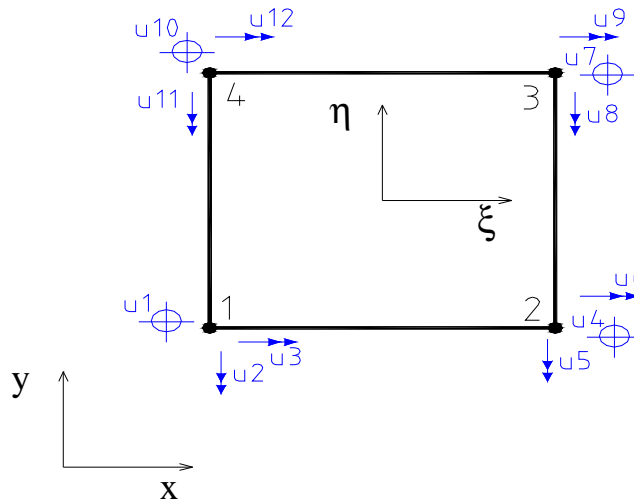


Figura 1- elemento considerado; graus de liberdade considerados

## 2.2 ISOPARAMETRIZAÇÃO

Por forma a possibilitar o estudo de problemas com geometrias complexas introduz-se o elemento isoparamétrico que consiste em definir a geometria do elemento usando as coordenadas dos pontos nodais e as mesmas funções de interpolação utilizadas na aproximação incógnita, ou seja, a função de interpolação para a geometria ( $N_i$ ) são iguais às funções de interpolação de deslocamentos

$$X_m = N_i \cdot X_m^{ei} \quad U_m = N_i \cdot U_m^{ei} \quad (1)$$

Esta parametrização é efectuada através de um problema de "mapping" cuja representação esquemática a seguir se apresenta

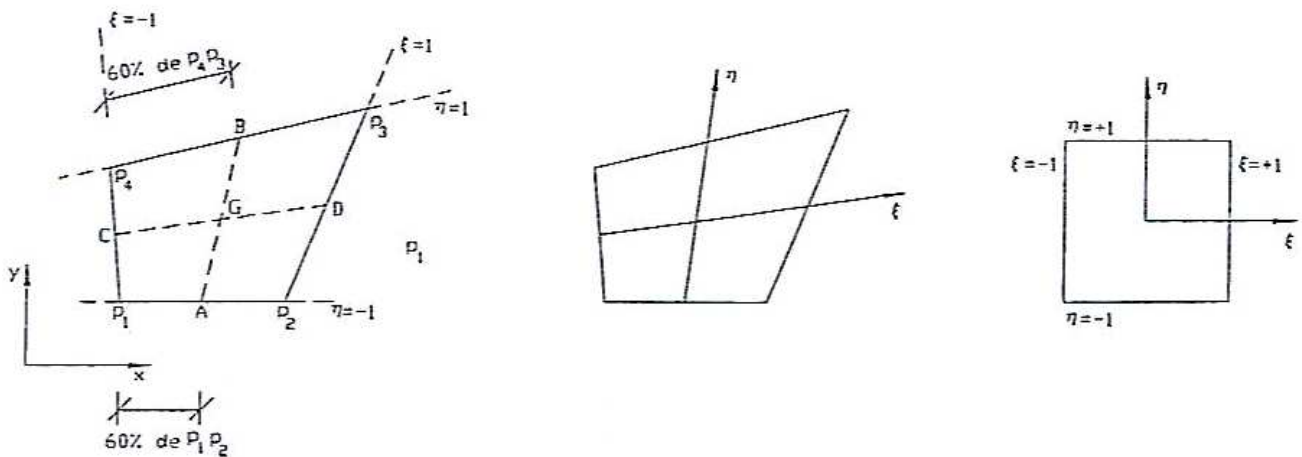


Figura 2 – “Mapping” de um elemento

Resulta a restrição que os ângulos internos devem ser inferiores a  $180^\circ$  (domínio convexo).

Deste modo transforma-se qualquer elemento quadrilátero num elemento quadrado de lado adimensional 2 que corresponde ao elemento considerado no desenvolvimento do software.

### 2.3 INTEGRAÇÃO NÚMERICA

O cálculo dos vários integrais que aparecem na formulação a seguir descrita serão efectuados usando o método de Gauss - Legendre, também conhecido como quadratura de Gauss que permite transformar os integrais em somatórios estendidos aos pontos de Gauss, que são pontos cujas coordenadas locais se apresentam à frente, tendo em conta que a cada ponto corresponde um dado peso.

A quadratura de Gauss-Legendre permite a integração exacta de um grau de polinómio  $p=2n-1$  com  $n$  pontos de gauss.

A expressão genérica para integrais simples, duplos ou triplos é a que se apresenta na página seguinte.

função de integração	integração numérica
$\int_{-1}^{+1} f(x) dx$	$\sum_{i=1}^{n_x} W_i \cdot f(P_i)$
$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy$	$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} W_i \cdot W_j \cdot f(P_i, P_j)$
$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y, z) dx dy dz$	$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} W_i \cdot W_j \cdot W_k \cdot f(P_i, P_j, P_k)$
$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz$	$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} W_i \cdot W_j \cdot W_k \cdot f(P_i, P_j, P_k) g(P_i, P_j, P_k)$

Esquema 1 – Quadratura de Gauss-Legendre

## 2.4 DEFORMABILIDADE POR CORTE

A teoria de lajes de Reissner-Mindlin permite considerar o efeito de deformabilidade por esforço transversal, considerando que fibras inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje permanecem rectas após a deformação do elemento estrutural, mas não necessariamente ortogonais àquele mesmo plano.

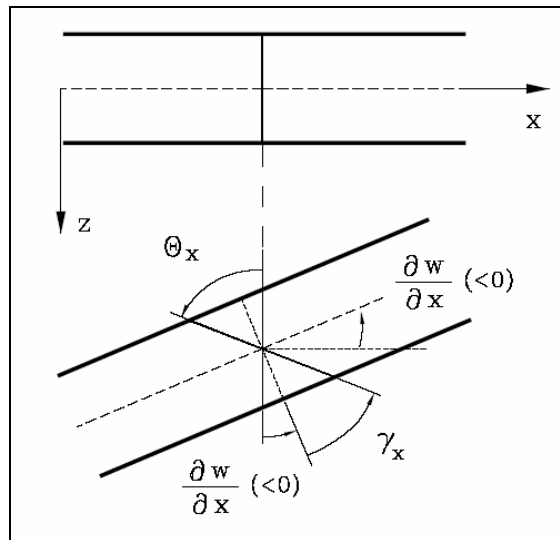


Figura 3 – Definição das rotações; teoria de Mindlin

Como as deformações por corte deixam de ser nulas é necessário determinar três campos independentes, o campo de deslocamentos transversais ou afundamento e os dois campos de rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$ .

No cálculo da matriz de rigidez e de acordo com a formulação abaixo, esta depende da matriz constitutiva  $D$ . Ora esta é como a

$$K_{ij}^e = \int_A B_i^T \cdot D \cdot B_j \, dx dy \quad (2)$$

frente se verá possui coeficientes que têm parcelas que vêm multiplicadas por  $h^3$ , no caso da flexão, e parcelas que vêm multiplicadas apenas por  $h$ , no caso da parcela de corte. Quando a espessura da laje começa a diminuir, a parcela de corte começa a predominar sobre a parcela de flexão, o que faz com que a influência desta última tenda a "desaparecer".

Ou seja, para espessuras pequenas e quando teoricamente a parcela de flexão deveria predominar sobre a de corte, nesta formulação verifica-se o contrário o que conduz a uma rigidez excessiva.

Para ultrapassar este efeito e atendendo ao exposto no artigo anterior sobre integração numérica, vai efectuar-se o cálculo da matriz de rigidez com recurso a integração exacta no caso da flexão e a integração reduzida no caso da parcela de corte o que vai induzir numa sub-integração.

Este tipo de integração é designada selectiva e no caso em estudo de elemento isoparamétrico de 4 nós corresponde a integração de  $2 \times 2$  para flexão e  $1 \times 1$  para o corte.

Apresenta-se de seguida as vantagens deste método em dois gráficos em que se apresenta em abcissas a relação  $L/h$  e em ordenadas o valor normalizado para o deslocamento em causa,  $w/w_e$ <sup>1</sup> num primeiro gráfico e num segundo a normalização do momento flector obtido  $m/m_e$ .

---

<sup>1</sup> O valor teórico do deslocamento transversal e do momento flector no ponto central em lajes finas é dado por :

$$\varpi_e = 0.40644 \frac{qL^4}{E \cdot h^3} \text{ e } m_e = 4.78863 \frac{qL^2}{100} \frac{1}{12(1-\nu^2)}$$

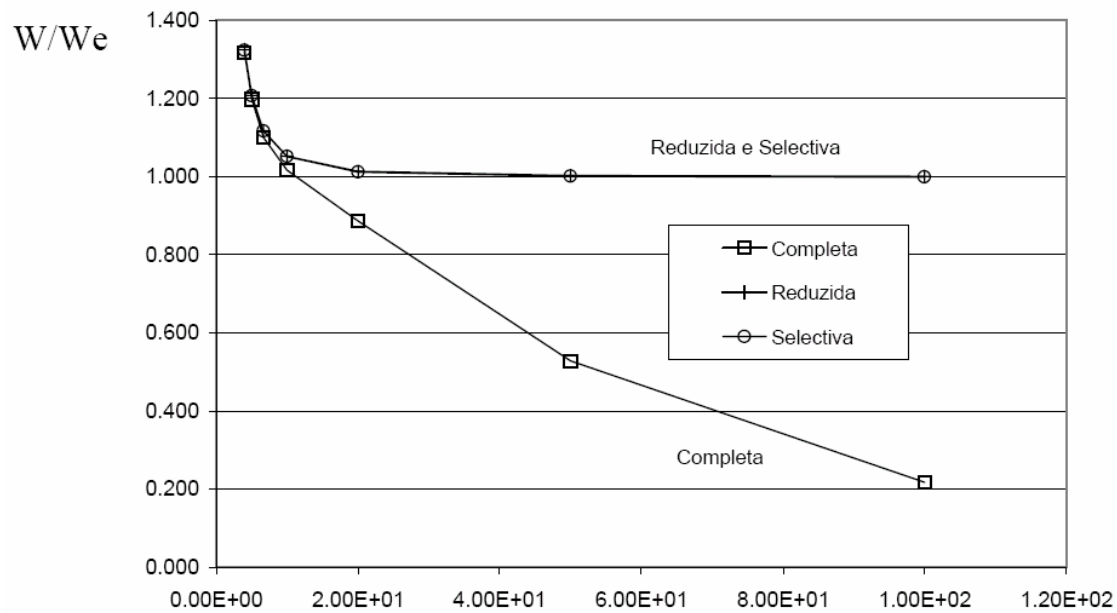


Figura 4 – Efeito de locking no valor do deslocamento transversal

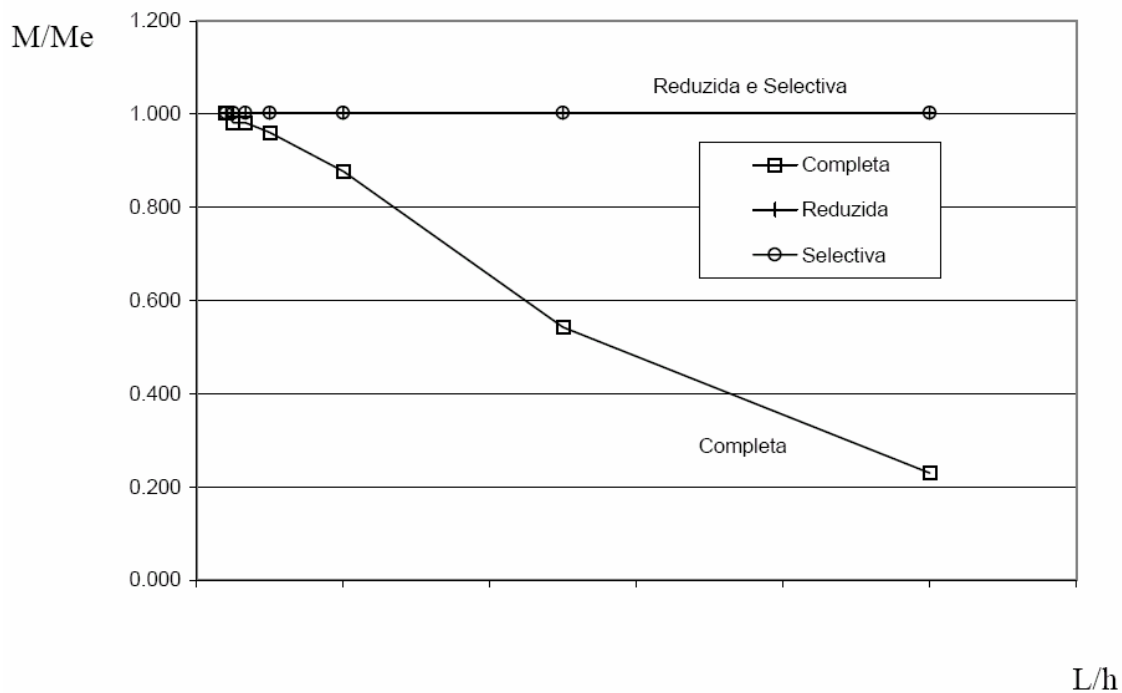
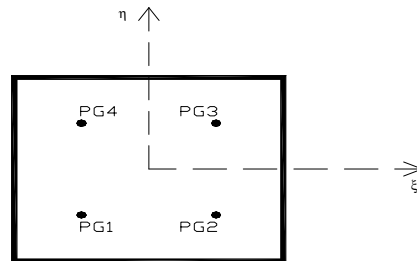


Figura 5 – Efeito de locking no valor do momentos flectores

É evidente o bom comportamento quando se usa uma integração selectiva quer ao nível da obtenção de esforços, quer de deslocamentos.

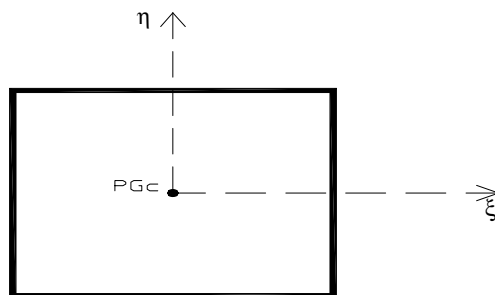
No caso presente e como estamos a usar um elemento isoparamétrico cujo subdomínio varia entre  $-1$  e  $1$ , vem para o caso da flexão e para a integração exacta os seguintes pontos:



Pontos de Gauss	$\xi$	$\eta$
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Figura 6 – Pontos de Gauss para integração exacta (flexão)

No caso de corte e para a integração reduzida usaremos apenas o ponto central do elemento



Ponto de Gauss	$\xi$	$\eta$
c	0	0

Figura 7 – Ponto de Gauss para integração reduzida (corte)

### 3. FORMULAÇÃO

#### 3.1 Funções de aproximação, interpolação ou funções de forma

As funções de forma ou aproximação são escolhidas de maneira a que seja possível obter através da equação

$$u = N \cdot a \quad (3)$$

, que relaciona o campo de deslocamentos de cada elemento  $u$  com os deslocamentos  $a$  globais, os deslocamentos em cada ponto do elemento a partir das coordenadas locais do ponto.

Se atendermos à equação de compatibilidade no domínio

$$\varepsilon = \Lambda \cdot u \quad (4)$$

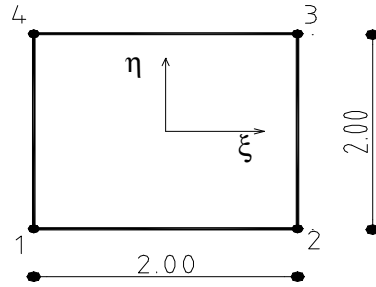
em que  $\Lambda$  é o operador diferencial de compatibilidade, temos segundo a teoria de Reissner-Mindlin,

$$\varepsilon_{flexão} = \begin{Bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ 2\chi_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}; \Lambda_{flexão} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; u = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \phi_x(x, y) \\ \phi_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

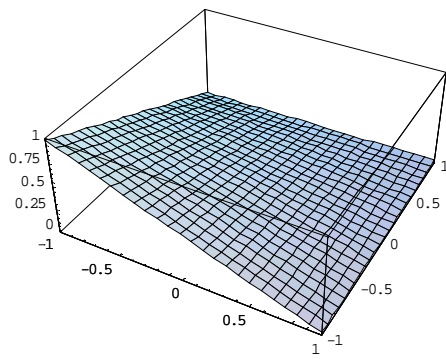
$$\varepsilon_{corte} = \begin{Bmatrix} \gamma_x(x, y) \\ \gamma_y(x, y) \end{Bmatrix}; \Lambda_{corte} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix}; u = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \phi_x(x, y) \\ \phi_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

pelo que analisando a matriz  $\Lambda$  verifica-se que só se encontram derivadas de primeira ordem, o que implica que apenas seja necessário garantir continuidade  $C^0$  para as funções de aproximação. Ou seja, para garantir a continuidade dos deslocamentos transversais e de todas as rotações, é suficiente garantir a continuidade das funções de interpolação utilizadas.

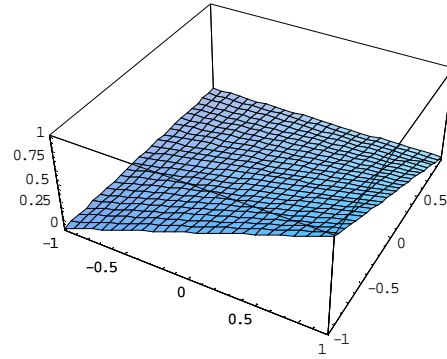




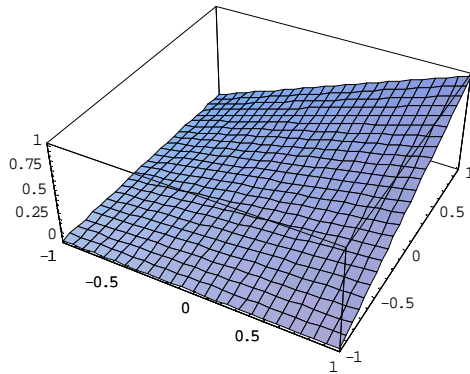
Para o elemento em causa, as funções de forma são:



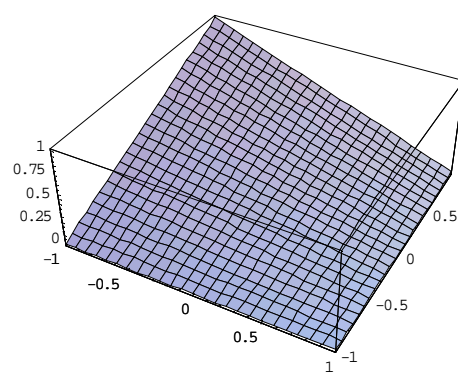
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$



$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$



$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$



$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

### 3.2 Matriz de deformação B

A matriz de deformação B que resulta da expressão

$$B = \Lambda \cdot N$$

(7)

Vem de uma forma generalizada,

$$\hat{B}_{flexão,i} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{B}_{corte,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

por forma a resolver numericamente os integrais onde a matriz de deformação se insere e atendendo ao conceito da quadratura de Gauss-Legendre é necessário calcular o valor da matriz B de flexão em cada ponto de integração k, assim

$$B_{f,k} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x},k & 0 & | & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x},k & 0 & | & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x},k & | & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x},k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y},k & | & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y},k & | & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y},k & | & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y},k \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y},k & -\frac{\partial N_1}{\partial x},k & | & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y},k & -\frac{\partial N_2}{\partial x},k & | & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y},k & -\frac{\partial N_3}{\partial x},k & | & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y},k & -\frac{\partial N_4}{\partial x},k \end{bmatrix}$$

com  $\frac{\partial N_i}{\partial x},k, \frac{\partial N_i}{\partial y},k$  sendo respectivamente o valor da derivada parcial da função de forma i em ordem a x ou y no ponto de integração k. Como no caso da flexão e por forma à integração ser exacta são necessários dois pontos de gauss por direcção, pelo que serão criadas quatro matrizes, uma por cada ponto de integração.

Do mesmo modo a matriz de deformação B de corte vem,

$$B_{c,k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x},k & -N_1,k & 0 & | & \frac{\partial N_2}{\partial x},k & -N_2,k & 0 & | & \frac{\partial N_3}{\partial x},k & -N_3,k & 0 & | & \frac{\partial N_4}{\partial x},k & -N_4,k & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y},k & 0 & -N_1,k & | & \frac{\partial N_2}{\partial y},k & 0 & -N_2,k & | & \frac{\partial N_3}{\partial y},k & 0 & -N_3,k & | & \frac{\partial N_4}{\partial y},k & 0 & -N_4,k \end{bmatrix}$$

sendo que neste caso e como o n.º de pontos de integração de gauss necessário é de 1 por direcção será formada apenas uma matriz.

• **Calculo de  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$**

A relação entre as derivadas naturais e as derivadas cartesianas e uma vez que as funções de forma vêm expressas em função das coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  podemos estabelecer:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (10)$$

ou matricialmente

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}}_{J^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{J^e} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} J^e \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

pelo que a matriz que relaciona as derivadas naturais com as derivadas cartesianas é designada de matriz Jacobiana  $(J^e)^2$  pelo que resolvendo o sistema de equações em ordem às derivadas cartesianas teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|J^{(e)}|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|J^{(e)}|} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \end{cases} \quad (12)$$

sendo que  $|J^{(e)}|$  representa o determinante da matriz Jacobiana. Para resolvermos os termos da matriz jacobiana utiliza-se a transformação isoparamétrica

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (13)$$

que derivando em ordem a  $\xi$  e  $\eta$  vem,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i ; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (14)$$

este será efectuado para cada ponto de integração por forma a obtermos  $\frac{\partial N_i}{\partial x}, k$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial y}, k$ .

---

<sup>2</sup> A definição de matriz Jacobiana é idêntica à adaptada por OÑATE, contudo alguns autores como Hughes usam uma definição diferente.

### 3.3 Matriz constitutiva D

A matriz constitutiva que permite relacionar o vector de tensões com o vector de extensões e que resulta da expressão

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (15)$$

vem e atendendo a que temos  $\sigma_z = 0$  (estado plano de tensão) para a parcela de flexão:

$$\sigma_f = \begin{Bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} ; D_f = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} ; \varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ 2\chi_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

de sublinhar e de acordo com o atrás referido para a contribuição da matriz de rigidez, a parcela da flexão cujos coeficientes vêm multiplicados por  $h^3$ , resulta exactamente da matriz  $D_f$ .

No que às tensões de cortes e à respectiva matriz constitutiva diz respeito, a mesma tem a forma a seguir descrita:

$$\sigma_c = \begin{Bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix} ; D_c = h \frac{A_r}{A} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} ; \varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_x(x, y) \\ \gamma_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

daqui refira-se os coeficientes da matriz de  $D_c$  que vêm multiplicadas por  $h$ , cuja contribuição para a matriz de rigidez origina o efeito de locking para lajes de espessura fina. A salientar, também, o quociente  $A_r/A$ , que no caso do elemento em causa assume o valor de  $5/6$ .

Este coeficiente advém da necessidade de corrigir o efeito da não-uniformidade das tensões tangenciais ao longo da espessura da laje

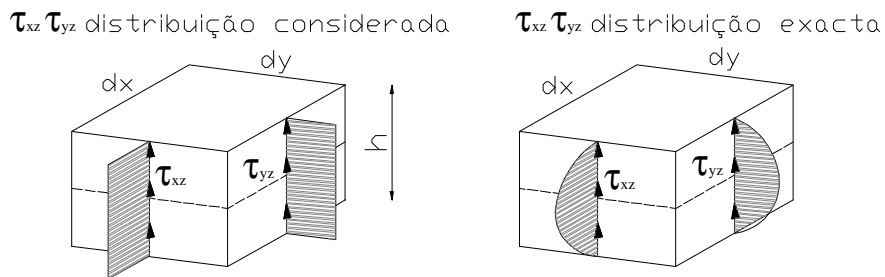


Figura 8 – convenção das tensões tangenciais

Sendo  $A_r$ , a área reduzida e representa a área que a secção teria que ter para a peça armazenar a mesma energia com tensão tangencial constante, sendo que para uma secção rectangular toma o valor  $A_r = A/1,2$ .

### 3.4 Matriz de rigidez K

A matriz de rigidez é definida de acordo com a equação (2), o que no presente caso e uma vez que a resolução desse integral será realizada com auxílio da quadratura de Gauss, e que através deste, com recurso à integração reduzida será eliminado o efeito de locking consequência da excessiva rigidez que apresentam as lajes finas quando considerada a deformabilidade por corte, esta será resultante da soma de duas parcelas, uma de flexão e outra de corte.

Assim,

$$K_{ij}^{e, flexão} = \int_A B_{f,i}^T \cdot D_f \cdot B_{f,j} dx dy \quad (18)$$

O determinante da matriz Jacobiana definida em (11), permite expressar o diferencial de área em coordenadas naturais,

$$dx dy = |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (19)$$

permitindo desta forma o cálculo da matriz de rigidez no domínio normalizado das coordenadas naturais

$$K_{ij}^{(e), flexão} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{f,i}^T(\xi, \eta) D_f B_{f,j}(\xi, \eta) |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (20)$$

assim e atendendo ao conceito da quadratura de gauss expresso no esquema 1, teremos em termos de calculo numérico

$$K_{ij}^{(e), flexão} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 W_m \cdot W_n \cdot B_{f,i_k}^T \cdot D_f \cdot B_{f,j_k} \cdot |J_k^{(e)}| \quad (21)$$

sendo que os valores da matriz B e do determinante da matriz são obtidos para cada ponto de gauss ou ponto de integração.

O mesmo raciocínio acontece quando se calcula a parcela da matriz de rigidez de corte, sendo que neste caso e como estamos perante integração reduzida, teremos

$$K_{ij}^{(e), corte} = \sum_{m=1}^1 \sum_{n=1}^1 W_m \cdot W_n \cdot B_{c,i_{PGcorte}}^T \cdot D_c \cdot B_{c,j_{PGcorte}} \cdot |J_{PGcorte}^{(e)}| \quad (22)$$

A matriz de rigidez global resulta da assemblagem de cada matriz de rigidez elementar sendo que  $K_{ij}$  representa o trabalho que as

tensões que se desenvolvem no estado  $j$  realizam nas extensões do estado  $i$ , pelo que, naturalmente, quando o deslocamento unitário em qualquer grau de liberdade não produz qualquer tensão num outro qualquer ponto de grau de liberdade esse valor é nulo.

### 3.4 Vector das forças externas $F$ e $Q$

O software desenvolvido além das cargas pontuais ( $Q$ ) aplicadas nos nós, visa também o cálculo de cargas de superfície, pelo que o vector de forças equivalentes a estas últimas é dado por

$$f_i^e = \int_A N_i^T \cdot p dA \quad (23)$$

pelo que neste caso e atendendo à definição em (19) e à quadratura de Gauss-Legendre, virá

$$f_i^e = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 W_m \cdot W_n \cdot N_i^T \cdot |J_k^{(e)}| \cdot p \quad (24)$$

com

$$p = \begin{Bmatrix} p \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix}$$

e

$$N_{i_k} = \begin{bmatrix} N_{1,k} & 0 & 0 & | & N_{2,k} & 0 & 0 & | & N_{3,k} & 0 & 0 & | & N_{4,k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{1,k}}{\partial x} & 0 & | & 0 & \frac{\partial N_{2,k}}{\partial x} & 0 & | & 0 & \frac{\partial N_{3,k}}{\partial x} & 0 & | & 0 & \frac{\partial N_{4,k}}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{1,k}}{\partial y} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_{2,k}}{\partial y} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_{3,k}}{\partial y} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_{4,k}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

os pontos de integração considerados,  $k$ , são os que permitem a integração exacta e que constam na figura 6, assim como os pesos de gauss considerados.

### 3.5 Resolução do sistema global

A assemblagem do conjunto é resolvido pela equação característica do método dos deslocamentos, método aliás onde se baseia esta ferramenta numérica e dado pela expressão geral

$$K \cdot a = (Q + F) \quad (25)$$

### 3.6 Cálculo de tensões e deslocamentos

deslocamentos elementares - formulação teórica

Após a resolução da equação (25) obtêm-se os deslocamentos globais da estrutura traduzidos no vector  $\{\mathbf{a}\}$ .

Assim obtidos os deslocamentos em todos os graus de liberdade considerados (deslocamentos transversais e rotações), impõe-se a determinação das tensões e deslocamentos elementares.

Os deslocamentos elementares são obtidos através da correspondência dos deslocamentos globais obtidos em  $\{\mathbf{a}\}$  e os graus de liberdade considerados na figura 1, assim,

$$w^e(x, y) = N_1(x, y) \cdot \hat{u}_1^G + N_2(x, y) \cdot \hat{u}_4^G + N_3(x, y) \cdot \hat{u}_7^G + N_4(x, y) \cdot \hat{u}_{10}^G \quad (26)$$

$$\theta_x^e(x, y) = N_1(x, y) \cdot \hat{u}_2^G + N_2(x, y) \cdot \hat{u}_5^G + N_3(x, y) \cdot \hat{u}_8^G + N_4(x, y) \cdot \hat{u}_{11}^G \quad (27)$$

$$\theta_y^e(x, y) = N_1(x, y) \cdot \hat{u}_3^G + N_2(x, y) \cdot \hat{u}_6^G + N_3(x, y) \cdot \hat{u}_9^G + N_4(x, y) \cdot \hat{u}_{12}^G \quad (28)$$

#### tensões elementares - formulação teórica

Obtidos as equações dos deslocamentos elementares os campos de curvatura ao longo do elemento podem ser obtidos através das expressões (5), assim

$$\chi_x^e(x, y) = -\frac{\partial \theta_x^e(x, y)}{\partial_x} \quad (29)$$

$$\chi_y^e(x, y) = -\frac{\partial \theta_y^e(x, y)}{\partial_y} \quad (30)$$

$$2\chi_{xy}^e(x, y) = -\frac{\partial \theta_y^e(x, y)}{\partial_y} - \frac{\partial \theta_x^e(x, y)}{\partial_x} \quad (31)$$

no que se refere às deformações de corte elementares as mesmas podem ser obtidas através da expressão (6), obtendo,

$$\gamma_x^e(x, y) = \frac{\partial w^e(x, y)}{\partial_x} - \theta_x^e(x, y) \quad (32)$$

$$\gamma_y^e(x, y) = \frac{\partial w^e(x, y)}{\partial_y} - \theta_y^e(x, y) \quad (33)$$

pela equação (16), obtêm os momentos flectores e momento torçor

$$C = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$m_x^e(x, y) = \chi_x^e(x, y) \cdot C + \chi_y^e(x, y) \cdot C \cdot \nu$$

$$m_y^e(x, y) = \chi_x^e(x, y) \cdot C \cdot \nu + \chi_y^e(x, y) \cdot C \quad (34)$$

$$m_{xy}^e(x, y) = \frac{Gh^3}{12} \cdot 2\chi_{xy}^e(x, y)$$

da mesma forma e para o esforço transversal ao longo do elemento (17)

$$\begin{aligned} v_x^e(x, y) &= \frac{A_r}{A} G.h.\gamma_x^e(x, y) \\ v_y^e(x, y) &= \frac{A_r}{A} G.h.\gamma_y^e(x, y) \end{aligned} \quad (35)$$

#### calculo numérico - tensões e deslocamentos - ISORM4N

As expressões anteriores que permitem determinarem os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto do elemento, tornam-se pesadas e de complexa aplicabilidade quando o domínio é composto por um número considerável de elementos, tendo um número elevado de graus de liberdade e consequente exponencial de fórmulas. No caso de cálculo numérico e usando a equação que relacionada as tensões com os deslocamentos globais

$$\sigma = DBa \quad (36)$$

temos para cada ponto de Gauss,  $k$ , do elemento e que no caso da flexão são os pontos identificados na figura 6, as tensões,

$$\hat{\sigma}_{f,k}^{(e)} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}, k = D_f \hat{B}_{f,k} . a^e \quad (37)$$

no que concerne às tensões de corte as mesmas serão definidas num único ponto de Gauss, definido na figura 7 e dado pela expressão

$$\hat{\sigma}_{c,PGcorte}^{(e)} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}, k = D_c \hat{B}_{c,PGcorte} . a^e \quad (38)$$

Assim para cada elemento que compõe o domínio serão obtidos de forma numérica os deslocamentos nodais, os momentos de flexão e torção nos quatro pontos de Gauss e os esforços de corte num único ponto de integração do elemento

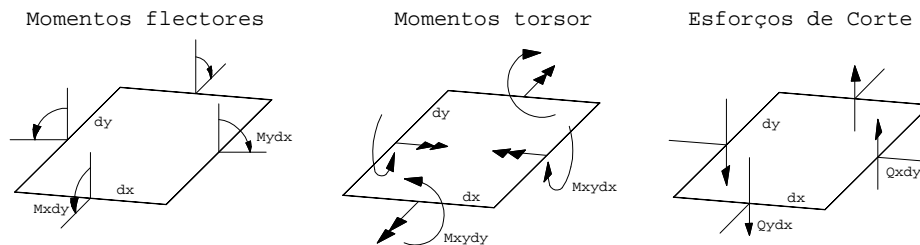


figura 9 –convenção de sinais para esforços em placas



#### 4. CONCLUSÃO

Após os testes efectuados ao software baseado na formulação anterior verifica-se que apresenta os mesmos resultados que o elemento finito de placa de Reissner-Mindlin de 4 nós rectangular, regular. Este elemento apresenta no entanto uma maior versatilidade relativamente a este último, permitindo adaptar-se a geometrias complexas, pela introdução da isoparametrização.

Embora usando por base uma teoria para lajes espessas (Reissner-Mindlin) graças à integração selectiva permite recuperar os resultados fornecidos pela teoria da Kirchhoff quando a espessura da laje começa a diminuir, tendo sobre este a vantagem de obter bons resultados numéricos para lajes espessas.

É conhecida a maior precisão dos elementos de 4 nós sobre os elementos triangulares, pelo que a principal vantagem destes, a versatilidade, é agora aproximada pela isoparametrização introduzida.

Em conclusão, estamos perante um elemento que em domínios devidamente descritizados permite muito bons resultados no calculo de um grande número de placas.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Lopes, Adelino Vasconcelos - Apontamentos sobre Método de Elementos Finitos, DEC-FCTUC, 2004.
2. OÑATE, E. - Cálculo de Estruturas por el Método de Elementos Finitos, 1ª Ed. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria, 1992.
3. Castro, Luís M. S. - Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes, IST, 2001
4. Azevedo, Álvaro F. M. - Método de Elementos Finitos, 1ª Ed., FEUP, 2003
5. Silva, V. Dias - Mecânica e Resistência dos Materiais, 2ª Ed. ,Zuari, 1999